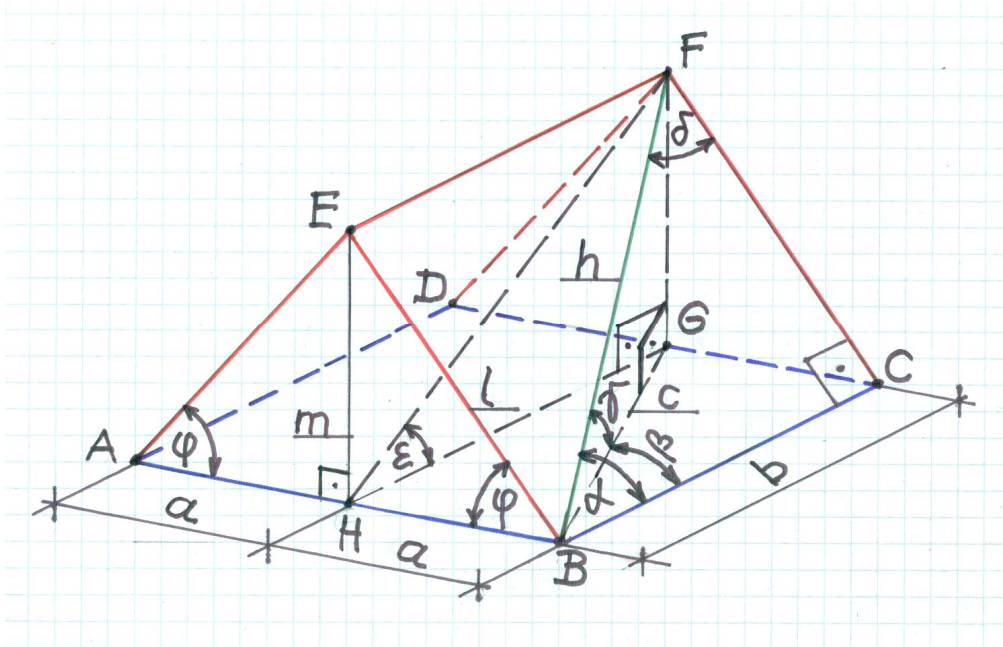


Vihardeszka valódi hosszának és hajlásának meghatározása

Adott az 1. ábra szerinti szimmetrikus nyeregtető az (a, b, φ) adatokkal.
Keressük a jellemző hosszak és szögek közötti összefüggéseket, így a címbeli feladat megoldását is.



1. ábra

Megoldás:

1. A vihardeszka h hosszának és γ hajlásszögének meghatározása

Pitagorász tételével és szögfüggvényekkel dolgozunk.

A BCF háromszögből:

$$h = \sqrt{b^2 + l^2} ; \quad (1)$$

a BGF háromszögből:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{c} . \quad (2)$$

Az EHB derékszögű háromszögből:

$$m = a \cdot \operatorname{tg} \varphi ; \quad (3)$$

ugyaninnen:

$$l = \frac{a}{\cos \varphi} . \quad (4)$$

A BCG derékszögű háromszögből:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} . \quad (5)$$

Most (1) és (4) - gyel:

$$\underline{\underline{h = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{\cos \varphi}\right)^2}}} . \quad (6)$$

Majd (2), (3) és (5) - tel:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi}} . \quad (7)$$

Innen visszakereséssel:

$$\underline{\underline{\gamma = \operatorname{arctg} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right]}} . \quad (8)$$

A (6) és (8) képletek a címbeli feladat megoldását adják. Ám itt nem hagyjuk abba a számítást, mert további érdekes és hasznos összefüggésekre tehetünk szert.

Ismét (2) és (3) - mal:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{c} = \frac{a}{c} \cdot \operatorname{tg} \varphi ; \quad (9)$$

ámde az 1. ábra szerint:

$$\sin \beta = \frac{a}{c} , \quad (10)$$

így (9) és (10) - zel:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \gamma = \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi}} . \quad (11)$$

2. Összefüggések a szögek között

(11) egy összefüggés a φ , β és γ szögek között. Ez azért lehet érdekes, mert a szokásos vetületi ábrázolás során az a helyzet, hogy a felülnézeti képen valódi nagyságban megjelenik a β szög, az oldalnézeti képen a φ szög; a γ szög valódi nagysága pedig csak akkor lesz meghatározható, ha pl. a **BGF** háromszög síkját az előlnézeti képsíkkal – itt: a **HGF** síkkal – párhuzamos helyzetbe forgatjuk, majd a szöget lemérjük. A (11) képlet segítségével azonban szerkesztés és mérés nélkül közvetlenül – ha β adott – , vagy közvetve – pl. a (10) képlet alkalmazásával – kiszámíthatjuk γ nagyságát.

A továbbiakban is (11) - hez hasonló összefüggéseket keresünk. Ezt azért is tesszük, mert tapasztalataink szerint gyakori hiba, hogy a kevésbé figyelmes tanuló hajlamos a vetületi szöget az ábráról leolvasni / lemérni és azt valódinak tekinteni.

Most foglalkozzunk az ε szög meghatározásával!

Az **FGH** háromszögből:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{m}{b} ; \quad (12)$$

most (3) és (12) - vel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi ; \quad (13)$$

ámde az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} , \quad (14)$$

így (13) és (14) szerint:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi . \quad (15)$$

Most (11) és (15) - tel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \beta} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \beta} . \quad (16)$$

Most foglalkozunk az α szög meghatározásával!

A **BCF** derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{b} ; \quad (17)$$

majd (5) és (17) - tel:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b \cdot \cos \varphi} ; \quad (18)$$

most (14) és (18) - cal:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \varphi} . \quad (19)$$

Most írjuk fel az α , β , γ és φ szögek közötti összefüggést!

(19) - ből:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi ; \quad (20)$$

majd (11) - ből:

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi ; \quad (21)$$

végül (20) és (21) -ből:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\beta} , \quad (22 / 1)$$

illetve:

$$\underline{\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\varphi .} \quad (22)$$

Végül a δ szögre a **BCF** háromszögből:

$$\delta = 90^\circ - \alpha . \quad (23)$$

Eredményeinkből egy képletgyűjteményt állítunk össze a szögekre:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 90^\circ - \alpha ; \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\varphi} ; \\ \operatorname{tg}\gamma &= \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi ; \\ \operatorname{tg}\varepsilon &= \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi ; \\ \operatorname{tg}\varepsilon &= \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\beta} ; \\ \operatorname{tg}\gamma &= \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\varphi . \end{aligned} \right\} \quad (K)$$

(K) alapján más érdekes feladatokat is megoldhatunk.

Például: ha adott β és φ , akkor α , δ , γ , és ε a (K) képletekkel azonnal számítható.

Számpélda:

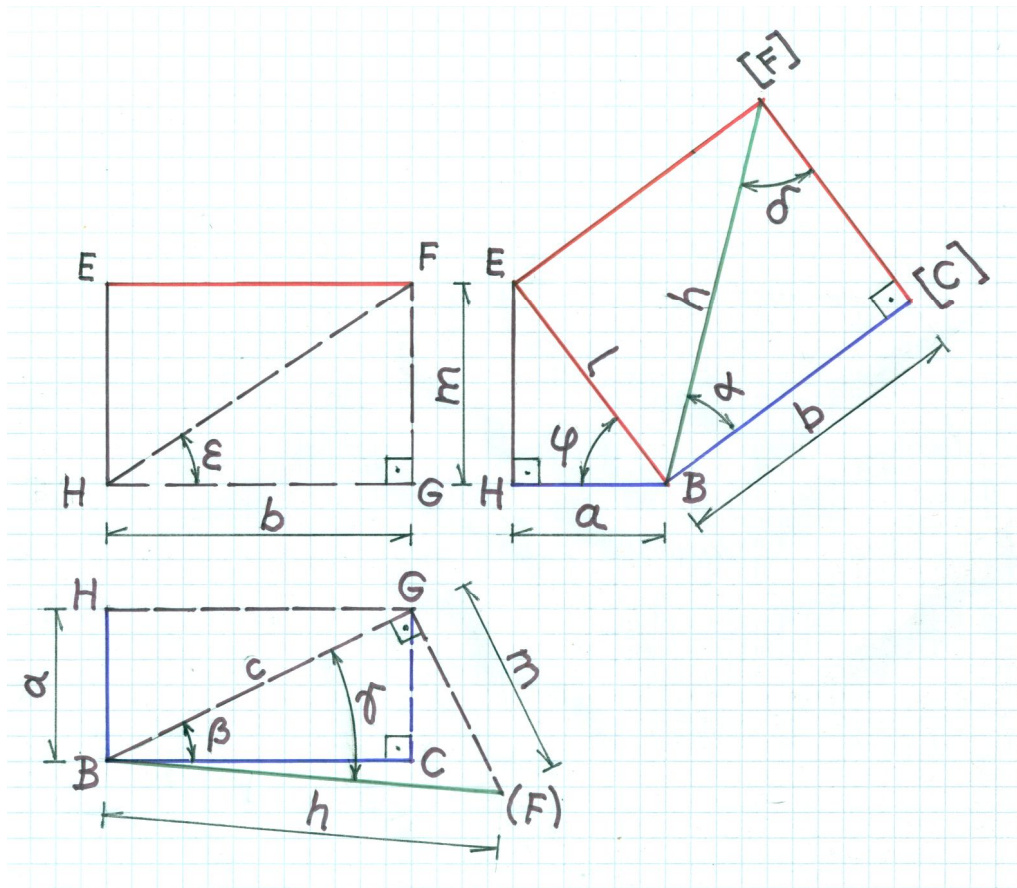
Ehhez tekintsük a 2. ábrát is! Itt az egyes jellemző síkidomok vetületi, illetve képsíkba forgatott ábráit rajzoltuk meg, az 1. ábra vonalfajtaival. Ez egyben a gyakorló számpélda szerkesztéses megoldása is, a következő bemenő adatokra, $M = 1: 100$ esetén:

$a = 3 \text{ m}; \quad b = 6 \text{ m}; \quad \operatorname{tg}\varphi = 4 / 3.$

A szerkesztési eredmények lemérve és kerekítve:

$h = 7,80 \text{ m};$

$\gamma = 31,0^\circ.$



2. ábra

A számításos megoldást (6) - tal kezdve:

$$h = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{\cos \varphi} \right)^2} = \sqrt{b^2 + a^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = \sqrt{6^2 + 3^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{4}{3} \right)^2 \right]} \text{ (m)} = \sqrt{61} \text{ (m)} \cong 7,81 \text{ m ,}$$

tehát:

$$\underline{\underline{h \cong 7,81 \text{ m .}}}$$

Ez jól egyezik a szerkesztés / mérés eredményével.

(8) - cal folytatva:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{3}{\sqrt{3^2 + 6^2}} \cdot \frac{4}{3} \right] \cong 30,81^\circ ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{\gamma \cong 30,81^\circ .}}$$

Ez is jól egyezik a szerkesztés / mérés eredményével.

Ne felejtsük el, hogy a számítás és a szerkesztés / mérés egymást ellenőrzik, így mind - kettőt alkalmazzuk!

Megjegyzések:

M1. Ilyen típusú feladatot már korábban is megoldottunk. Erre nézve lásd a
Bakdúc - karpánt valódi hosszának és hajlásának meghatározása
 című egyik előző dolgozatunkat!

E két feladat közös vonása, hogy egy általános helyzetű térbeli egyenes szakasz hosszát és hajlását kell meghatározni, a vetületi ábrákról levezhető adatok ismeretében.

M2. Talán „kakukktojásnak” tűnhet az α és δ szögek szerepeltetése a számításokban. Ezzel arra is fel kívántuk hívni a figyelmet, hogy az ácsnak a munkája során gyakran adódik olyan feladata, hogy meg kell állapítania a csatlakozó elemek közbezárt szögét. Ez néha nem is annyira egyszerű feladat. Itt egy kis kóistolót adtunk ebből is.

M3. E dolgozatokban azt kívántuk bemutatni, hogy ezek a feladatok a szakmunkástanuló számára sem megoldhatatlanok, a tanult elemi geometriai / szakrajzi és matematikai ismeretek birtokában. Továbbá azt is, hogy a technikus, illetve a mérnök / tanár számára is hordozhat megszívlelendő tanulságokat az alkalmazott eljárás, valamint hasznos lehet az ily módon előállított képletgyűjtemény. Ha a trigonometriai formulákat csak közöljük, az ijesztő lehet; ám itt megtalálhatóak az elemi levezetések, melyeket az Olvasó most már tanulmányozhat, önállóan alkalmazhat, illetve folytathat.
 Jó munkát!

Összeállította: Galgóczi Gyula
 mérnöktanár

Sződliget, 2011. június 6.